**תרגיל 2 – יחסים (כללי) ויחס שקילות**

1. **תהי . נגדיר שני יחסים על : .**
2. **האם  רפלקסיבי על ? האם  סימטרי ? האם  אנטי סימטרי ? האם טרנזיטיבי ?**

R רפלקסיבי (מופיעים בתוכו כל הזוגות מצורת ). S סימטרי (כל זוג שמופיע בתוכו, מופיע גם בסדר ההפוך . R אנטי סימטרי (אין בו שום זוג שמופיע גם בסדר ההפוך ומקיים ). R טרנזיטיבי (לכל מתקיים ).

1. **חשב את , את  ואת .**
2. **חשב את . האם  רפלקסיבי על ? סימטרי ? אנטי סימטרי ? טרנזיטיבי ?**

אינו רפלקסיבי, כיון שהאיברים אינם מופיעים בו. הוא אינו סימטרי, כיון שהאיבר מופיע בו, ואילו לא מופיע. הוא אנטי סימטרי (הזוגות היחידים שמופיעים בסדר ישר והפוך הם ). הוא טרנזיטיבי (ע"פ ההגדרה).

1. **תהיינה . כמה יחסים מ- A ל- B ניתן להגדיר ?**

מספר היחסים הוא עוצמת קבוצת החזקה של המכפלה ביניהם, שהיא 2 בחזקת עוצמת המכפלה, שהיא מכפלת העוצמות:

1. **נגדיר שלושה יחסים על  (קבוצת המספרים השלמים) :**
   1. **היחס  המוגדר - לכל  :  כאשר (  ו-  ) או**

**(  ו-  ) או ( ו- ) .**

**האם  רפלקסיבי על ? האם  סימטרי? האם  אנטי סימטרי? האם  טרנזיטיבי?**

**נמק תשובותיך!**

R רפלקסיבי.

הוכחה: יהי . אם אז מתקיים , ואם אז מתקיים .

*מ.ש.ל.*

R אינו סימטרי.

לדוגמא: מופיע, לעומת שאינו מופיע.

*מ.ש.ל.*

R אנטי סימטרי.

הוכחה: יהי כך שמתקיים גם , וצ"ל כי :

אם שניהם שליליים או שניהם אי-שליליים: מדובר ביחס של אי-שויון חלש, שהוא תמיד אנטי-סימטרי (היחס מתקיים לשני הצדדים כאשר מתקיים ).

אם אחד המספרים שלילי והשני אי-שלילי – לא ייתכן ששניהם יופיעו ביחס (ע"פ הגדרתו).

*מ.ש.ל.*

R הוא טרנזיטיבי.

הוכחה: יהיו שלשה מספרים שלמים המקיימים , וצ"ל כי מתקיים גם :

אם שלשת המספרים אי-שליליים מתקיים ולכן ולכן .

אם שלשתם שליליים מתקיים ולכן ולכן .

אם הם מעורבים – ננתח את האפשרויות:

אם y שלילי, הרי שגם z שלילי, כי מתקיים , ולכן (ע"פ ההנחה שקיים מספר אי-שלילי אחד לפחות מביניהם) x אי-שלילי, ולכן .

אם y אי-שלילי הרי שגם x אי-שלילי (כי ההגדרה היחידה שמתאימה לy אי-שלילי כך ש היא כאשר שניהם אי-שליליים), ולכן (ע"פ ההנחה שקיים מספר שלילי אחד לפחות) z שלילי, ולכן .

*מ.ש.ל.*

1. **היחסים  הבאים מוגדרים על .**

**עבור כל אחד מהם בדוק האם כל אחת מהתכונות הבאות מתקיימת. אם התכונה**

**מתקיימת הוכח, אחרת הסבר מדוע התכונה לא מתקיימת.**

**1. רפלקסיביות, 2. סימטריות, 3. אנטי סימטריות, 4. טרנזיטיביות.**

**ג.  כאשר קיים  כך ש  או שקיים  כך ש .**

הערה: נשים לב שהמנה חייבת להיות מספר טבעי, כי וגם נותנות מספרים טבעיים בלבד.

היחס L הוא רפלקסיבי, כי כל מספר טבעי יקיים: .

היחס L איננו סימטרי. לדוגמא: , אבל , שאיננו מספר טבעי, ולכן מתקיים , אבל לא מתקיים

היחס L הוא אנטי-סימטרי, כי אם הוא מספר טבעי, וגם הוא מספר טבעי – אז (1 הוא המספר הטבעי היחיד שההופכי שלו הוא מספר טבעי)*.*

*היחס L איננו טרנזיטיבי. לדוגמא: כי , וגם כי , אבל לא מתקיים , כי הלוגריתם של 6 בכל בסיס שונה מ6 איננו מספר טבעי.*

1. **הוכח כי אם  רפלקסיביים על קבוצה אז גם היחסים הבאים רפלקסיביים על .**

**א. . ב. . ג. .**

צריך להוכיח כי לכל יחס מהנ"ל מתקיים שכל איבר בקבוצה עומד ביחס עם עצמו.

א-ב. מכיון שכל איבר בקבוצה עומד ביחס R עם עצמו, וגם ביחס S עם עצמו, לכן:

(השתמשתי בהגדרת הרפלקסיביות, ובהגדרת האיחוד והחיתוך)

ג. הגדרת ההרכבה היא שלכל בקבוצת ההרכבה קיים שמקיים את שני היחסים: . ע"פ הרפלקסיביות של R,S ניתן לומר שלכל a מתקיים כאשר רוצים להכניס את לקבוצת ההרכבה, ולכן גם ההרכבה היא רפלקסיבית (אולי ניתן לומר מכאן שהרפלקסיביות היא תכונה טרנזיטיבית...).

1. **א. הוכח שלכל שני יחסים  המוגדרים על קבוצה  מתקיים:**

**1) , 2) .**

1) צריך להוכיח שכל איבר בקבוצה נמצא בקבוצה , וההוכחה תהיה אנלוגית לגבי . וצריך להוכיח גם שכל איבר בקבוצה נמצא או בקבוצה או בקבוצה :

יהי אז מתקיים:

יהי , אז מתקיים , כלומר שמתקיים לפחות אחד משני התנאים:

2) צריך להוכיח שכל איבר בקבוצה נמצא בקבוצה . וצריך להוכיח גם שכל איבר בקבוצה נמצא בקבוצה וגם בקבוצה :

יהי אז מתקיימים שני התנאים:

יהי , אז מתקיים , כלומר מתקיימים שני התנאים:

**ב. נתון ש  יחסים סימטריים על קבוצה . האם גם  סימטריים על ? הוכח תשובתך.**

טענה: שני היחסים הם סימטריים.

כדי להוכיח שיחס T הוא סימטרי צריך להוכיח שאם אז .

יהי , צ"ל כי : מההגדרה נובע שמתקיימים שני התנאים:

יהי , צ"ל כי : מההגדרה נובע שמתקיים לפחות אחד מתוך שני התנאים:

**ג. הוכח שלכל יחס  המוגדר על קבוצה , היחסים  סימטריים על .**

יהי , צ"ל כי : מההגדרה נובע שמתקיימים שני התנאים:

יהי , צ"ל כי : מההגדרה נובע שמתקיים לפחות אחד מתוך שני התנאים:

**ב. נתון ש  יחסים אנטי סימטריים על קבוצה . האם  יחס אנטי סימטרי על ? הוכח!**

לא! דוגמא שלילית: , במקרה זה מתקיים: !

1. **נתון ש**  **יחסים אנטי סימטריים על קבוצה** **. האם גם** **ו-**  **אנטיסימטריים? נמק.**

החיתוך הוא אנטי-סימטרי, כי אין זוג שאינו שווה המקיים סימטריה בקבוצה R וגם לא בקבוצה S, והחיתוך יכול רק להוריד איברים אבל לא להוסיף!

האיחוד איננו חייב להיות אנטי-סימטרי. דוגמא נגדית:

1. **א. מצא דוגמא ליחס שהוא סימטרי וגם אנטי סימטרי.**

כל איברי קבוצת החזקה של יחס הזהות.

**ב. האם כל יחס שהוא סימטרי וטרנזיטיבי הוא גם רפלקסיבי? נמק!**

לא! לדוגמא היחס R בין שני מספרים שלמים, המכיל רק מספרים **זוגיים** השוים זה לזה בערכם המוחלט. הוא סימטרי וטרנזיטיבי, אבל לא רפלקסיבי, כי המספרים האי-זוגיים לא עומדים ביחס עם עצמם.

1. ***על נגדיר שני יחסים: T,S :***

*** כאשר*  *הוא כפולה של 5.***

*** כאשר*  הוא *כפולה של 5.***

***בדוק לגבי כל אחד מהיחסים האם הוא יחס שקילות.***

S רפלקסיבי (כי כל מספר מינוס עצמו שווה 0, שזה כפולה של 5 ב0), ואילו T אינו רפלקסיבי (כי 3+3 איננו כפולה של 5).

שניהם סימטריים (T ע"פ חוק החילוף, S כי אם אז ).

S טרנזיטיבי, כי אם וגם אז , ואילו T אינו טרנזיטיבי (לדוגמא: 2+3=5, 3+7=10, אבל 7+2=9).

מסקנא: S הינו יחס שקילות, ואילו T איננו יחס שקילות.

1. **ציין לגבי כל אחד מהיחסים הבאים האם הוא יחס שקילות על הקבוצה .**

**אם כן, מצא את מחלקת השקילות של 1 , את החלוקה שהיחס משרה ואת גודל קבוצת המנה.**

**ג. **

היחס הזה אינו טרנזיטיבי (כי 1 עומד ביחס עם 2, וגם 2 עומד ביחס עם 4, אבל 1 לא עומד ביחס עם 4), ולכן איננו יחס שקילות.

**ד. **

יחס זה הינו יחס שקילות. מחלקת השקילות של 1 היא: , החלוקה היא: 2 בנפרד, ושאר המספרים במחלקת השקילות של 1, ולכן גודל (עוצמת) קבוצת המנה הוא 2.

1. **נגדיר יחס  על קבוצת הנקודות במישור  ע"י  כאשר .**
2. **הוכח כי**  **הוא יחס שקילות.**

היחס הוא סימטרי, כי אם אז מתקיים גם .

היחס הוא רפלקסיבי, כי אם ניקח את הנקודה , היא עומדת ביחס עם עצמה: .

היחס הוא טרנזיטיבי, כי אם ניקח את שלשת הנקודות , ששני זוגות מתוכן מקיימים שמרחקן מהראשית שווה – גם הזוג השלישי יקיים זאת.

**ב. מהן מחלקות השקילות של ? קבע נציג לכל מחלקת שקילות.**

מחלקות השקילות של R הן מעגלים שמרכזם בראשית הצירים. נציג לכל מחלקה: כך שk הוא רדיוס המעגל.

1. **היחס  נקרא יחס מעגלי על קבוצה  כאשר לכל  מתקיים:**

**אם  וגם  אז .**

1. **הוכח: אם**  **יחס רפלקסיבי ומעגלי על קבוצה**  **אזי**  **הוא יחס שקילות.**

רפלקסיבי: ע"פ הגדרה.

סימטרי: נניח , כאשר a שונה מb, אז מתקיים וגם , וע"פ המעגליות .

טרנזיטיבי: נניח וגם . ע"פ המעגליות וע"פ הסימטריה .

**ב. הפרך ע"י דוגמא נגדית: אם יחס סימטרי ומעגלי על קבוצה  אז יחס שקילות. בדוגמא, כמובן יש לציין מהי הקבוצה ומהו היחס.**

R סימטרי, טרנזיטיבי, מעגלי, אנטי סימטרי, ואולי עוד כמה דברים נחמדים, אבל הוא לא רפלקסיבי!

1. **הוכח: אם  ו-  הם שני יחסי שקילות על קבוצה A אז גם  יחס שקילות על A .**

בתשובה 8 הוכחתי רפלקסיביות. בתשובה 9ב הוכחתי סימטריות. נותר להוכיח רק טרנזיטיביות:

נסמן את היחסים באותיות אחרות להקלת הכתיבה: